ENKELE OPMERKINGEN OVER DIDACTIEK

door

Prof. Dr. E. W. Beth

Het feit, dat Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof in hun artikel over „Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde" (*Euclides* XXXIII, pp. 33—47) een aantal kritische opmerkingen hebben willen wijden aan mijn „Réflexions sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique", heeft mij opzichzelf oprecht verheugd. Ik vrees evenwel dat hun kritiek in verschillende opzichten een minder juiste indruk kan wekken omtrent mijn opvattingen; de volgende kanttekeningen mijnerzijds zijn daarom wellicht niet geheel overbodig.

Mijn „Réflexions" danken hun ontstaan aan een samenspreking over leerplan-problemen, in welk verband mijn taak bestond in de behandeling van de wederkerige aanpassing van de wiskunde-programma's voor het middelbaar en hoger onderwijs. Nu houden de Heer en Mevrouw van Hiele m.i. ten onrechte in het geheel geen rekening met deze bijzondere omstandigheid, en de door hen aangevoerde bezwaren schieten dientengevolge hun doel voorbij. Zo maken zij er mij (p. 46) een verwijt van, „het aanvangsonderwijs van de meetkunde te richten op een doel, dat in het hoger onderwijs ligt"; dit is een zeer onredelijk verwijt, gezien het speciale doel van mijn studie.

Ook houden ze mij (p. 47) voor, dat ik had moeten „uitgaan van de leersituaties". Dit is echter klaarblijkelijk alleen mogelijk, indien een aantal voor de leersituatie bepalende factoren, met name het leerplan, als van tevoren gegeven mag worden verondersteld, wat echter onverenigbaar zou zijn geweest met de mij opgedragen taak.

Verder geven de schrijvers aan mijn door hen in de aanhef van hun artikel geciteerde uitspraak een strekking, die er volkomen vreemd aan is. Of aan de deductieve behandeling van de meetkunde een geheel anders opgezette, door de schrijvers (p. 35) als „niet wiskundig" aangeduide, propaedeuse moet of kan voorafgaan, was in mijn studie in het geheel niet in het geding. De bedoelde uitspraak ziet uitsluitend op het *eind*-resultaat van het wiskunde-onderwijs, voorzover dit *wel* een wiskundig (in de zin van: deductief) karakter heeft.

Ook de strekking van mijn postulaten is de schrijvers blijkbaar ontgaan: zij hebben alleen de bedoeling, van de discussie alle scholen of school-typen uit te sluiten, die niet aan zekere voorwaarden voldoen.

Een veel ernstiger bezwaar acht ik het, dat de schrijvers mijn opvattingen bestrijden, zonder dat ze ervan behoorlijk hebben kennisgenomen. Weliswaar vermelden ze in hun proefschriften over *De problematiek van het inzicht* en *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (beiden R.U. Utrecht 1957), behalve mijn ,,Réflexions", ook mijn beide rapporten over ,,Doel en zin van het meetkunde-onderwijs" (*Euclides* XIV) en ,,De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde" (*Euclides* XVI); maar in hun artikel vindt men daar weinig sporen van, en evenmin van mijn proefschrift over *Rede en aanschouwing in de wiskunde* (R.U. Utrecht 1935) en van mijn *Wijsgerige ruimteleer* (Antwerpen 1950). Ik wil nu zeer in het kort laten zien, dat kennisneming van deze publicaties een heel ander beeld van mijn opvattingen zou hebben opgeleverd.

Op. p. 34 betogen de schrijvers: ,,*Met* de kennisneming van de deduktieve metode zal de leerling moeten leren begrijpen, onder welke voorwaarden een dergelijke metode mogelijk is." Een bespreking van deze voorwaarden vindt men op pp. 239—240 van ,,Doel en zin".

Op p. 38 behandelen de schrijvers een fenomenologische analyse van de ruimte. Men vergelijke hiermee *Rede en aanschouwing*, pp. 74—76, waar ook reeds gesproken wordt over de grenzen van de toepassing der deductieve methode.

Op p. 46 beroepen de schrijvers zich op Kohnstamm's stelling volgens welke ,,de ontwikkeling van het logische denken beschouwd moet worden als het resultaat van een leerproces." Op deze stelling heb ik mij in ,,De psychologische argumenten" eveneens beroepen.

Op mijn beurt moge ik thans ook een kritische opmerking maken. Ik heb ernstig bezwaar tegen de wijze waarop de schrijvers de term ,,*relatie*" gebruiken. Op p. 33, regel 24, schijnen zij met ,,relatie" te bedoelen: uitspraak of stelling, evenals op p. 34, regel 42. Op p. 35. daarentegen wordt dezelfde term gebruikt in de zin van ,,tweeledig predicaat". Deze terminologie maakt het hier en daar zeer moeilijk, hun betoog te volgen. Zo is op p. 36, regel 9, niet te zien, welke van de twee betekenissen nu eigenlijk bedoeld is. —

Bovenstaande beschouwingen hadden ten doel, mijn eigen positie te verduidelijken en de indruk weg te nemen, als zou er over al de tot dusver aangeroerde kwesties tussen de van Hiele's en mij een diep-

gaand meningsverschil bestaan. Ik kom nu echter tot een punt, waar onze opvattingen waarschijnlijk wel zullen uiteengaan.

Op p. 35 maken de schrijvers de volgende, m.i. zeer juiste, opmerking:

Het is deze strenge eis, die aan het logische „volgen uit" gesteld moet worden, welke het onderwijs in de meetkunde zo moeilijk maakt. De wezenlijke inhoud van tal van redeneringen in de wiskunde gaat aan de leerlingen voorbij, omdat zij van het „volgen uit" slechts een globale inhoud kennen.

Verderop spreken zij dan over „leerlingen, van wie men kan betwijfelen, of het vertrouwd zijn met de deduktieve metode veel waarde heeft" (p. 36), over „de weinige leerlingen, die zich tot dit denkniveau weten op te werken" (p. 43), en over „de grote groep van diegenen, voor wie vertrouwdheid met dat systeem van twijfelachtige waarde is" (p. 46). Ook tegen deze onderscheiding, die rechtstreeks voortvloeit uit waarnemingen in het dagelijkse schoolleven, is m.i. weinig aan te voeren. De grote, en voor elke discussie over het wiskunde-onderwijs beslissende, vraag is nu echter, welke didactische consequenties dit waarnemingsfeit meebrengt.

Voor velen staat het vast, dat wij hier te maken hebben met verschillen in ingeboren aanleg. In zeer veel gevallen zal dit inderdaad wel zo zijn: waarschijnlijk in al die gevallen, waarin ook in andere opzichten een tekort aan ingeboren intelligentie aannemelijk kan worden gemaakt. Het feit echter dat, zoals wij gezien hebben, de ontwikkeling van het logisch denken als het resultaat van een leerproces moet worden beschouwd, maant ons tot grote voorzichtigheid met betrekking tot die leerlingen, die in allerlei opzichten blijk geven van een behoorlijke, soms zeer goede, intelligentie, maar die, op grond van een achterstand in de ontwikkeling van het logisch denken, met de meetkunde grote moeilijkheden hebben; bij deze leerlingen zou sprake kunnen zijn van een aangeboren partiëel intelligentie-defect, maar hun achterstand zou ook te wijten kunnen zijn aan een of andere storing in het leerproces.

Afziende van voor de hand liggende begripsverfijningen, die voor onze discussie niet ter zake doen, moeten we dus rekening houden met drie typen:

(i) leerlingen die vatbaar zijn (of t.z.t. vatbaar kunnen worden) voor „wiskundig" meetkunde-onderwijs („ de weinigen" van de van Hiele's);

(ij) Leerlingen die, in overeenstemming met hun ook overigens geringe intelligentie, nooit vatbaar zullen blijken voor zulk onderwijs („de grote groep");

(iij) leerlingen die in veel opzichten een goede mate van intelligentie tonen maar die, door welke oorzaak dan ook, voor „wiskundig" meetkunde-onderwijs niet vatbaar zijn of schijnen.,

De beschouwingen van de Heer en Mevrouw van Hiele suggereren, dat leerlingen van deze drie typen (althans zo lang mogelijk) gezamenlijk onderwijs ontvangen, waarbij dan de leerlingen van type (i) in de minderheid zijn. Of de schrijvers deze toestand gewenst (of althans aanvaardbaar) achten, blijkt niet. In ieder geval aanvaarden zij hem inzoverre, dat zij aan het bestaan ervan een argument ontlenen ten gunste van hun opvattingen, daar immers volgens hen „de onderwijsmetode, die het best voorbereidt op het logisch deduktieve systeem, ook een belangrijke vorming biedt aan de grote groep van diegenen, voor wie vertrouwdheid met dat systeem van twijfelachtige waarde is" (p. 46).

Nu klinkt het in de eerste plaats reeds onwaarschijnlijk, dat men de propaedeuse tot een „wiskundige" behandeling van de meetkunde zo kan inrichten, dat deze even toegankelijk en tegelijk even nuttig is voor leerlingen van type (ij) als voor die van type (i). We hebben immers gezien, dat de moeilijkheid van een „wiskundige" behandeling van de meetkunde gelegen was in het logische „volgen uit", en de propaedeuse zal er dus met name op gericht moeten zijn, de leerlingen van type (i) met dit begrip vertrouwd te maken, of hen althans rijp te maken voor het werken ermee; wordt dit doel niet bereikt, dan zal het in de gedachtengang van de schrijvers niet mogelijk zijn, met de „wiskundige" behandeling van de meetkunde te beginnen. Het is niet te zien, welke vruchten een dergelijke propaedeuse zal kunnen opleveren voor de leerlingen van type (ij), die immers aan het logische „volgen uit" nooit zullen toekomen.

Maar, ten tweede, ook al zou het mogelijk zijn, een propaedeuse „á double usage" op te zetten, dan volgt daaruit nog volstrekt niet, dat het wenselijk zou zijn, leerlingen van beide typen daarin gezamenlijk te onderwijzen. Van zulk een inrichting van het onderwijs is weinig goeds te verwachten. Want het is te voorzien dat een propaedeuse, die zich niet bepaalt tot „fröbelen", voor leerlingen van type (ij) veel groter moeilijkheden zal opleveren dan voor die van type (i). Indien de laatsten in de minderheid zijn, dan zullen uiteraard de eersten het tempo bepalen. Het gevolg daarvan kan geen andeı zijn, dan dat de belangstelling bij de leerlingen van type (i) gering zal zijn. Het is dus te verwachten dat, wanneer eenmaal een begin moet worden gemaakt met de „wiskundige" behandeling, de belangstelling voor de meetkunde bij die leerlingen, voor wie deze behandeling bedoeld is, reeds gedoofd zal zijn, terwijl de propaedeuse ook

zal blijken te hebben gefaald terzake van de verwachte begripsvorming.

Beide overwegingen wijzer er op, dat het bepaald zeer ongewenst is, leerlingen van type (i), de enigen die vatbaar zijn voor „wiskundig" onderwijs in de ware zin des woords, te onderwijzen tesamen met leerlingen van type (ij), vooral, wanneer deze laatsten in de meerderheid zijn. Nu geloof ik dat, ook bij een zwakke selectie van de leerlingen, een dergelijke situatie in de regel wel vermeden wordt. Een veel moeilijker probleem vormen evenwel de leerlingen van type (iij), waarover ik nog niet veel gezegd heb. Een nadere bespreking van de problemen, die hier rijzen, zou mij echter veel te ver voeren.

BOEKBESPREKINGEN

W. G. Ackermann, *Einführung in die Wahscheinlichkeitsrechnung.* Hirzel Verlag› Leipzig 1955, 185 blz. Prijs DM 11.—

In zijn voorwoord zegt de schrijver, dat hij zijn boekje geschreven heeft, omdat tot nu toe een (kleine) inleiding in de waarschijnlijkheidsrekening ontbrak. Voor de lezers, die een in het Duits geschreven boekje verlangden, was dit bij het schrijven van dit boekje in januari 1955 misschien wel juist, maar de Nederlandse lezer kan nu en kon toen naar verschillende Engelse en Amerikaanse inleidingen grijpen. De waarde van dit boekje, dat juist omdat het een inleiding is, geen nieuws biedt op zuiver wetenschappelijk gebied, wordt dus bepaald door de speciale onderwerpen, die er in behandeld worden, die niet in alle andere inleidingen staan en door de helderheid van de betoogtrant. Het speciale onderwerp is hier sommen van onafhankelijke variabelen.

Het eerste van de drie delen kan tot verwarring aanleiding geven omdat het te ver gaat maar niet ver genoeg. Waarschijnlijkheden worden hier gedefinieerd met limieten van frequentiequotiënten in navolging van Von Mises, maar van een „Kollektiv" wordt geen „Regellosigkeit" geeist. Wat hiervan het gevolg is wordt in het midden gelaten. Dit lijkt me pedagogisch niet te verantwoorden. Verder bevat dit eerste deel (34 pagina's) de gebruikelijke optel- en vermenigvuldigregels voor waarschijnlijkheden en wat eenvoudige toepassingen daarvan op de gebruikelijke munten en vazen.

In het tweede deel (71 pagina's) over stochastische variabelen en hun verdelingen, wordt, nadat de verdelingsfunctie van een ééndimensionale stochastische variabele, zijn verwachting, momenten, enige eenvoudige ongelijkheden voor momenten en de transformatie van een variabele besproken zijn, relatief veel aandacht (16 pagina's) geschonken aan het trekken van conclusies over een verdelingsfunctie met behulp van de momenten, waarbij onder andere de reeksen van Brunn en Charlier behandeld worden. Vervolgens komen de normale verdeling, meerdimensionale verdelingen, correlatie en n-dimensionale normale verdeling aan de beurt.

In het derde deel (76 pagina's) over sommen van (onafhankelijke) variabelen wordt de definitie van de som van twee stochastische variabelen en van de karak-

teristieke functie gegeven. Om onder andere de (niet bewezen) continuiteitsstelling voor karakteristieke functies te kunnen toepassen, wordt de omkeerformule van Lévy bewezen. De zwakke en sterke wet van de grote getallen en de wet van de geitereerde logarithme worden kort besproken, waarna de centrale limietstelling bewezen wordt, eerst voor een bijzonder geval en daarna (volgens Ljapounoff) voor onderling onafhankelijke variabelen, met eventueel verschillende verdelingen, waarvan het absolute derde moment begrensd is. Na definitie der cumulanten wordt de Brunnse reeksontwikkeling toegepast op de verdelingsfunctie van de genormeerde som van n variabelen. De Poissonverdeling komt tevoorschijn als limiet van de binomiale verdeling en ook in een wat algemener geval. Uitbreidingen naar meerdimensionale verdelingen worden kort afgedaan en op enige eenvoudige gevallen toegepast. Tenslotte worden, nadat de Maxwellse snelheidsverdeling afgeleid is, enige beschouwingen over de entropie van een gas gegeven.

Het boekje munt dus niet uit door originaliteit, maar is zeker niet uitgesproken slecht. Een attractie is, dat naast de vele voorbeelden aan het eind van elk deel een aantal opgaven voor de lezer gegeven worden, die de behandelde stof nog eens van de praktische kant belichten, en waarvan de volledige oplossing gegeven wordt.

J. Th. Runnenburg

Dr. W. T. Van Est, 200 *jaar topologie*; Inaugurele rede, Leiden 8 november 1957. 17 blz.; *f* 1,50; J. B. Wolters, Groningen-Djakarta.

De auteur verontschuldigt zich voor het feit dat de wiskunde een wetenschap is die zich zo moeilijk voor popularisering leent tengevolge van haar sterk deductief karakter en door de omstandigheid dat de abituriënten van het V.H.M.O. in hun schooljaren met weinig anders kennis gemaakt hebben dan met de griekse wiskunde en met de algebra der renaissance.

Zonder in technische details te treden geeft de auteur een boeiend overzicht van de ontwikkelingsgeschiedenis van de algebraïsche topologie als een der takken van de moderne meetkunde. Enkele oude problemen uit deze topologie hebben een algemene bekendheid weten te verwerven, doordat ze als recreatieve wiskunde doorgedrongen zijn in de puzzle-rubrieken van courant en tijdschrift (b.v. het Königsberger bruggenprobleem en het probleem der elkaar niet snijdende verbindingswegen). Het bruggenprobleem dateert van 1736, toen Euler er een verhandeling aan wijdde. In 1895 was de topologie, ondanks bijdragen van Gauss, Listing, Riemann, e.a. nog niet veel meer dan een losse collectie resultaten, die zich onder drie hoofden laten rangschikken: (1) Riemannse samenhangstheorie, (2) Eulerse polyederstelling, (3) omslingeringsproblemen. In een fundamentele verhandeling van het jaar 1895 weet Poincaré de topologie van het embryonale voorwetenschappelijke stadium tot het niveau van een wetenschap te verheffen.

De auteur gaat in het bizonder in op de homologie- en homotopietheorie, en op de begrippenkritiek waartoe de studie van de topologie aanleiding heeft gegeven.

,,200 jaar topologie", deze titel karakteriseert ondubbelzinnig de jeugd van deze nieuwe wetenschap, vooral als we ze plaatsen naast een titel als ,,5000 jaren internationale wetenschap" van de oratie van prof. Freudenthal in 1946, waarmee deze de wiskunde bedoelde, en naast de titel van een artikel van deze laatste auteur: ,,80000 jaren sterrenkunde", welke levensduur van de oudste wetenschap een schatting betekent berustend op onderzoekingen van prof. Lundmark uit Zweden.

Kennismaking met de oratie van Prof. Van Est wordt aan ieder belangstellende gaarne van harte aanbevolen.

Joh. H. Wansink

G. R. Veldkamp, *Inleiding tot de Analyse*. J. B. Wolters, Groningen-Djakarta, 1957. *f*. 28.50.

Dit omvangrijke werk (400 bladzijden, een aanhangsel van 56 bladzijden en een tachtigtal bladzijden opgaven) wil een leerboek zijn voor beginners in de wiskundige Analyse. Speciaal is hierbij gedacht aan studerenden voor de middelbare acten en aan eerste en tweedejaars studenten.

Naar mijn eerste indruk zal dit werk in het Nederlandse taalgebied zeker in een behoefte voorzien. Men kan niet anders dan waardering hebben voor het vele werk dat het verantwoord opstellen van zo'n leerboek van de schrijver vraagt.

Ik vraag mij alleen af wanneer men het leerboek toch niet zonder leraar wil laten gebruiken, zoals de uitdrukkelijke wens van de schrijver is, het niet mogelijk en gewenst zou zijn de omvang iets beknopter te houden. Wel is er bewust naar gestreefd de bewijzen kort en elegant te houden en formele kwesties betreffende notaties zuiver te behandelen.

Geheel consequent is de auteur niet gebleven; op pag. 94 en 95 vinden we b.v. naast elkaar de veelterm f(x) en de veelterm f.

Gelukkig wordt als regel de notatie f voor een functie gekozen. Moeilijk is de invoering van de differentialen (VIII-6, pg. 163). Of een differentiaal een getal, toegevoegd aan een functiewaarde of een functie, toegevoegd aan een andere functie is, wordt niet duidelijk, Men krijgt de indruk dat de auteur het eerste bedoelt, maar dan is de notatie df i.p.v. df (x) verwarrend.

Een bezwaar is m.i. dat de fundamentele overdekkingsstelling van Heine-Borel pas op bladzijde 233 wordt behandeld. Om een opbouw van functies van een veranderlijke te verkrijgen, die zich zo eenvoudig mogelijk op meer veranderlijken en zelfs naar meer abstracte theorieën laat generaliseren, zou deze stelling een centrale plaats in de opbouw moeten innemen.

Ook zou ik de complexe getallen op een eerder ogenblik ingevoerd willen zien. Bij de integratie methoden (zowel breuksplitsing als sommige goniometrische integralen) kan men met vrucht van de complexe getallen gebruik maken.

In de theorie van de reeksen, en zeker bij de machtreeksen, zou ik de complexe getallen vanaf het begin beschikbaar willen hebben.

Overigens kunnen deze bezwaren geen afbreuk doen aan de gunstige indruk, die ik van het begin af aan van dit werk kreeg.

Tot slot enkele persoonlijke opmerkingen (voor de tweede druk?).

(1) De notatie: „in 7 decimalen is : $e = 2,7182818$." irriteert mij. (pg. 133, 141, 242, 402).

(2) Bij de substitutie regel komt in de praktijk vaak een substitutie functie voor die in een eindig aantal punten de afgeleide nul heeft, deze vallen niet onder de behandelde theorie (pg. 156).

(3) Voor de berekening van $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ zou ik naar de fraaie en eenvoudige methode van M. Krafft (J.D.M.V. 57 (1955) pg. 31) willen verwijzen. (pg. 324).

Al met al een boek dat zeker niet alleen geschikt is voor de studerenden, maar voor de wat langer geleden afgestudeerden van waarde zal zijn om de gehele analysestof nog eens te overzien. Zelfs zouden die enkele geestdriftige jongeren, die in de grote vacantie voor de universitaire studie al wat willen doen naast het voortreffelijke Servire boekje van Van der Waerden over differentiaal rekening dit uitgebreidere boek gerust ter hand mogen nemen! Ook daarom is het in de aandacht van de wiskundeleraren aanbevolen!

F. van der Blij

Lancelot Hogben, *Meten is Weten*. Uitg. Elsevier, Amsterdam, Brussel. 1957 69 blz. Prijs *f* 9,75.

Er bestaat bij het wiskunde-onderwijs op onze scholen weinig gelegenheid om in te gaan op de historische ontwikkeling van de wiskunde. De leerlingen krijgen rekenkunde, algebra en meetkunde in de huidige vorm voorgezet terwijl bij hen het besef dat deze vorm het resultaat is van een eeuwenlange ontwikkeling slechts dan enigermate wordt gewekt, indien de leraar daaraan eens een les besteedt.

Het boek van Hogben kan op dit punt door zijn eenvoud en zijn aantrekkelijke vorm goede diensten bewijzen. Het geeft door tekst en illustratie op populaire wijze de ontwikkeling van de wiskunde en haar betekenis voor onze beschaving weer. Bij de beschrijving van de wiskunde in de Oudheid neemt de ontwikkeling van de aanduiding der getallen door cijfertekens een belangrijke plaats in. Ook aan de eerste beginselen van de meetkunde wordt aandacht geschonken. Bij de Babyloniërs en de Feniciërs wordt gewezen op de betekenis van de astronomie.

De gekleurde illustraties werken door hun duidelijkheid verhelderend; zij verlevendigen het betoog en verhogen daardoor de waarde van het boek.

Enkele critische opmerkingen. Het is jammer dat de maan er in de illustraties (blz. 8, 25, 57) niet al te best afkomt; die op blz. 8 is essentieel fout. Verder wordt een bekende populaire fout gemaakt in het onderschrift van een plaatje op blz. 63: „Watt maakte de kracht van een paard tot eenheid van kracht". Het woord „grootcirkel" (blz. 36) is geen nederlands.

Als geheel een boek, dat, indien de genoemde onjuistheden door de leraar worden verbeterd, voor onze schoolbibliotheken kan worden aanbevolen.

D. N. van der Neut

R. M. Thrall, L. Tornheim, *Vector Spaces and Matrices*. New York, Wiley, London, Chapman, 1957. Prijs $ 6,75.

Lineaire ruimten, matrices, determinanten, lineaire vergelijkingen, orthogonale en symmetrische lineaire afbeeldingen en eigenwaarden worden op een gematigd peil behandeld; axiomatische en meer concrete methoden wisselen aangenaam af.

De laatste hoofdstukken, hoofdzakelijk over elementaire delers en aanverwante kwesties staan op een vrij hoog, abstract, peil. Lineaire ongelijkheden en matrixspelen worden kort behandeld. Het peil der vraagstukken is misschien niet hoog genoeg vergeleken met dat van de theorie.

Enkele aanmerkingen: 1. Bij lineaire afbeeldingen wordt het functie symbool achter i.p.v. voor het argument geplaatst. Dit brengt zeer kleine voordelen met zich en tevens reusachtige nadelen, zolang de gebruikelijke schrijfwijze in andere delen der wiskunde, speciaal in de analyse, wordt gehandhaafd. 2. Het moeilijke probleem om van de dubbele functie van matrices (voor coördinaten-transformaties èn voor ruimtetransformaties) rekenschap af te leggen, is didactisch onvoldoende opgelost. Met de op zichzelf aardig gevonden woorden „alias" en „alibi" voor deze twee functies is het niet gedaan. De enige duidelijke oplossing zou zijn, een coördinatensysteem konsekwent op te vatten als een 1-1-lineaire afbeelding op een getallenruimte. 3. Determinanten worden puur formeel en ongemotiveerd ingevoerd (inductieve definitie door ontwikkeling naar de eerste kolom). Over de samenhang tussen determinanten en volumes wordt in het hele boek niet gerept. Voor mijn gevoel is dat een zeer ernstige misgreep, die het boek ondanks veel kwaliteiten niet geschikt doet zijn voor leerboek.

Een opmerking: De ongelijkheid van Schwarz wordt door de auteurs valselijk aan Schwartz toegeschreven.

Hans Freudenthal

DE DIDAKTIEK VAN DE MEETKUNDE IN HET BEGIN VAN HET TWEEDE LEERJAAR VAN HET V.H.M.O. DE OVERGANG NAAR HET TWEEDE DENKNIVEAU

door

Dr. D. VAN HIELE-GELDOF

Om het leerproces dat mijn leerlingen in de eerste drie maanden van het tweede leerjaar doormaakten te kunnen volgen, is het nodig te vernemen op welke didaktische principes mijn onderwijs is gebaseerd en hoever de leerlingen reeds in de meetkunde waren doorgedrongen aan het eind van hun eerste leerjaar.

De didaktiek houdt zich bezig met onderwijs-leerverschijnselen d.w.z. de leerverschijnselen die ontstaan door en tengevolge van het onderwijsproces. Het kind is al voordat het regelmatig onderwijs krijgt, in een leerproces gewikkeld en, wat zijn ontwikkeling betreft, sterk afhankelijk van het milieu waarin het leeft. De didaktiek heeft ten doel dit leerproces te versnellen. Centraal staat dan ook in de didaktiek van de meetkunde van het eerste jaar: a) hoever is de leerling met zijn leerproces in de meetkunde als hij op de M.S. komt? b) hoe moet het onderwijs gegeven worden, opdat de leerling er een leerproces aan kan verbinden; m.a.w. hoe verloopt het leerproces onder invloed van het onderwijs en c) wat is het voorlopig doel, want dit bepaalt mede hoe wij het leerproces zullen beïnvloeden.

Er zijn twee elkaar aanvullende manieren om de didaktiek te benaderen. De eerste wijze van werken is, dat men in de praktijk de verschijnselen van het onderwijs-leerproces in de didaktische kontekst [2] waarneemt, analyseert, en vervolgens door hypotese en toetsing tot een vulling van de didaktische begrippen tracht te komen.

De tweede wijze van werken is een geheel andere, een meer induktieve metode. Men gaat uit van verschijnselen in het gedrag van de mens, die een leerproces achter de rug heeft, analyseert deze fenomenaal en tracht dan door induceren tot didaktische begrippen door te dringen.

Past men in een tijd, waarin het onderwijs zich op nieuwe wegen begeeft, alleen de eerste meer deduktieve metode toe, dan loopt men de kans dat de exploraties van de docenten niet tot begrippen voeren.

schrijven: Eerst is er een periode waarin door doen strukturen, die herhaalde malen voorkomen, herkend worden. Er ontstaat een signaal, dat waarschuwt wanneer de handeling fout verricht wordt, de verkregen struktuur wordt als fout herkend. Men weet dan dat men dwaalt. Hierop volgt een periode van fouten maken omdat het signaal aanvankelijk alleen maar aanwijst of het resultaat goed of fout is; het signaal verbetert de handeling niet, het levert niet automatisch de struktuur van de handeling. Pas na herhaald en volgehouden pogen (trial and error) krijgt de persoon de struktuur van de handeling te pakken. Hij weet nu te handelen. Er is na het ontstaan van het signaal een periode van oriëntatie nodig die voor ieder persoonlijk anders verloopt.

In verband hiermee wil ik het volgende voorval vertellen. Toen mijn oudste dochtertje leerde lezen, was zij op een keer bezig zich te oefenen in het lezen van korte zinnetjes, waarin steeds het zelfde woord „hek" voorkwam. Zij las op de eerste regel niet hek maar huis en als een echte schoolmeester verbeterde ik haar wel drie of viermaal achtereen. Omdat de fout zich zo hardnekkig herhaalde ontbrak mij de lust met de korrektie door te gaan. Zij las het woord nog verscheidene keren fout, maar plotseling ging het goed en het bleef daarna goed gaan.

Horen dat je het fout doet, houdt nog niet in dat je het kunt verbeteren. Hier ziet men, hoe zich tijdens de handeling een in aanleg reeds aanwezig signaal, ontwikkelen kan.

Waarschijnlijk omdat mijn aandacht op dit verschijnsel gevallen was, herkende ik het daarna ook in andere leerprocessen. Zo b.v. bij de algebra les, wanneer ik in de eerste klas van de M.S. vele bewerkingen met de letter door elkaar liet oefenen en in de meetkunde les, wanneer ik de evenwijdigheids- en kongruentie kenmerken liet gebruiken. Door deze analyse kwam ik tot het volgende principe: Tijdens de oriëntatie mogen, ja moeten, de leerlingen fouten maken. Het heeft weinig zin de fouten stuk voor stuk te laten verbeteren. Vordert het kind niet, dan kan men beter het onderwijs nog eens van meet af aan herhalen.

Het didaktisch begrip „fouten-analyse" heeft nu een vulling gekregen: Tijdens het leerproces zorgt de docent fouten-analyses te maken om na te gaan 1) welk kind klaar is met zijn oriëntatie, zodat het aan de technische beheersing kan beginnen 2) welk kind nog midden in de oriëntatie is, zodat het beslist niet aan training moet meedoen en 3) voor welk kind de handeling nog in het geheel geen signaal [2]) heeft, zodat voor hem het gehele onderwijsproces op dezelfde voet dient te worden voortgezet, omdat er nog geen aanwijs-

baar leren heeft plaats gehad. Van het organisatievermogen van de docent hangt het af in hoeverre het lukt de eenheid van onderwijzen en leren voor een zo groot mogelijk aantal leerlingen te bewaren.

Voor het meetkunde-onderwijs is de moeilijkheid nu verschoven naar de vraag: over welke signalen beschikken de kinderen en berust het meetkunde-leren op reeds gevormde signalen?

Wat het „meetkunde-leren" betreft moeten wij ons niet wenden tot matematici — deze geven de fundamenten van „meetkunde" en niet van het „meetkunde leren". Een axiomatische fundering zonder beroep op de aanschouwing heeft pas zin voor personen, die op een hoog denkniveau zijn, dus voor hen, die het „meetkunde leren" reeds lang achter de rug hebben.

De empirische vormen, waarvan wij uit moeten gaan, zijn niet de objekten waaraan men meetkunde d.w.z. Euclidische meetkunde kan leren. Deze steunt op de aanschouwelijke evidentie.

Het „meetkunde leren" berust dus op de vooronderstelling dat de objekten van de buitenwereld bij de waarneming onmiddellijk worden gekend als aanschouwelijk meetkundig verschijnsel. Dit betekent dat alleen de kinderen, die van binnen uit over een signaal beschikken waardoor zij bij de waarneming van de objekten der meetkunde deze onmiddellijk kennen „meetkunde" kunnen leren. Het gaat er dus om, of hiervoor een leerproces noodzakelijk is en of wij van buitenaf door inschakelen van een onderwijsproces een signaal voor dit kenvermogen kunnen laten ontwikkelen.

De Gestaltpsychologie helpt ons hierbij op weg. Het kind is van jongs af bezig te leren waarnemen. Als kleuter beschikt het reeds over een signaal dat hem de vorm der dingen doet herkennen. Dat betekent, dat het kind door exploratie in staat is het vormgeven te leren. Aanvankelijk werkt het signaal als korrektor, die de fouten aangeeft. Blijft het kind proberen, dan komt het tot een eigen vormgeving, die afhankelijk is van de natuurlijke begaafdheid, het milieu en de persoonlijke instelling. De vormen krijgen daardoor een zeer persoonlijke struktuur.

Voor het onderwijs is nu de vraag van belang: Hoe moet de waarnemingswereld van het kind gestruktureerd zijn, opdat het kind de beste kansen krijgt zich de juiste signalen voor de „meetkunde" te vormen?

Deze wordt opgelost door het volgende didaktische principe:[3)]
Aan het meetkunde leren gaat een periode vooraf waarin de waarnemingswereld gestruktureerd wordt onder het aspekt van de ordening die de „meetkunde" vereist.

Deze waarnemingsstrukturen zijn de eerste symbolen, die nodig

zijn om meetkunde te leren. Het zijn niet symbolen, die behoren bij de, aan de matematikus reeds bekende, teorie. In de genese van de meetkunde heeft men aanvankelijk geheel andere symbolen [2] nodig.

Onder invloed van de hiervoor genoemde signalen heeft het kind door exploratie o.a. het „passen" geleerd. Het kind kan vouwen, inpassen enz. Beginnen wij het meetkunde-onderwijs met hanteerbaar materiaal dan kunnen de leerlingen zelf de resultaten van dit passen vastleggen. Het „denkend" doen brengt de leerlingen tot een bewust leren waarnemen — tot apperceptie. Door het expliciteren van de ordening in de waargenomen strukturen worden deze tot meetkundige symbolen. Figuren krijgen zodoende meetkundige eigenschappen — zij worden meetkundig gestruktureerd. De ruit wordt zo symbool voor al zijn bekende meetkundige eigenschappen.

Door dit handelen met de objekten kunnen bij het kind nieuwe signalen ontstaan. Op den duur gaat het n.l. de figuren herkennen aan een deel van hun eigenschappen — er is dan anticipatie mogelijk. Met behulp van die signalen oriënteert het zich in het veld van de symbolen om de struktuur van hun onderlinge samenhang te doorzien. Deze oriëntering wordt gesteund door het zelf maken van modellen. Het konstrueren dat daarbij verlangd wordt, is bij uitstek geschikt om de leerlingen tot de gewenste exploratie te doen komen. De motivatie ligt in de leerstof zelf. Uiteindelijk kan dan de leerling opereren met figuren en toont daarmee begrip voor het aspekt van de meetkunde. Zijn denken beweegt zich op het eerste niveau en hij kan nu ook figuren konstrueren.

Mijn didaktisch principe: de meetkunde in het eerste jaar van de M.S. met een periode van „denkend doen" aan te vangen heeft daarmee een vulling gekregen. Het leerproces in de meetkunde beginne met een receptieve [4] instelling van de leerling, waarbij het leren meer op de handeling met de objekten is ingesteld. Op het moment, dat de strukturen van de geometrische vormen van deze objekten herkend worden, moet de instelling van de leerling zich wijzigen in een meer aktieve opdat deze zich met behulp van het gevormde signaal in het veld der symbolen zal kunnen oriënteren. In de plaats van het daadwerkelijk passen komt nu het leren konstrueren. Het onderwijsproces dat met dit leren een eenheid vormt zal in de praktijk door exploraties van de docent-didaktikus moeten ontstaan en door het maken van foutenanalyses tijdens het onderwijsproces gekontroleerd en door nieuwe exploraties steeds verbeterd moeten worden. Het eerste leerproces mag als beëindigd beschouwd worden voor die leerlingen, die a) een figuur in de meetkunde opvatten als een totaliteit van meetkundige eigenschappen,

b) deze eigenschappen in de gebruikelijke terminologie kunnen weergeven, c) voor wie deze symbolen in het waarnemingsveld signaleren en d) die bovendien nog met de symbolen kunnen opereren.

Op het nulde niveau [1] beschikken de leerlingen over de handeling „passen". Op het eerste denkniveau [1] beschikken de leerlingen over de handeling „konstrueren". Zij zijn daartoe gekomen door explicitatie van de struktuur van de ordening, die impliciet in het passen zit. Vandaar dat het geheel niet onverschillig is, wat wij laten doen met het konkrete materiaal. Vouwen, spiegelen, draaien, stapelen bereiden de ordenende principes: kongruentie, evenwijdigheid en gelijkvormigheid voor. Deze komen binnen het gezichtsveld, behoren tot de meetkundige symbolen en worden meegestruktureerd.

Op het eerste denkniveau kunnen deze meetkundige symbolen signaalkarakter [2] krijgen. Juist door het konstrueren daadwerkelijk toe te passen bij het overbrengen van figuren en daarna te expliciteren wat zij impliciet gebruikt hebben, komen de leerlingen tot een verdere vulling van het begrip kongruent: Kongruente driehoeken zijn te herkennen aan de gelijkheid van drie zijden, enz.

Een zaag is te herkennen óf aan de eigenschap, dat zij twee stel evenwijdige lijnen bezit óf aan de gelijke verwisselende binnenhoeken, enz.

Wij merken nu de volgende overeenkomst op: door te expliciteren wat impliciet in het „konstrueren" ligt opgesloten kunnen de signalen ontstaan, waardoor de leerling in staat is op het tweede denkniveau [1] te komen. Door daadwerkelijk passen komt de leerling tot herkenning en dientengevolge na oriëntering tot een voorspellen of het zal passen. Hij kan denken dat hij past, zonder het te doen. Daardoor ontstaan de signalen voor het konstrueren.

Door daadwerkelijk konstrueren komt de leerling tot herkenning en voorspelling van de konstrueerbaarheid. Hij kan denken dat hij konstrueert zonder het te doen. Daardoor ontstaan de signalen voor de konstrueerbaarheid der meetkundige ruimte. De leerling, die over dit signaal beschikt, kan op het tweede denkniveau komen. Op dit niveau moet het kind eerst zijn om de Euclidische meetkunde te kunnen begrijpen.

De vooronderstelling, dat de objekten van de buitenwereld bij de aanschouwing onmiddellijk worden gekend in afbeeldend verschijnsel, betekent dat de „meetkunde" gebaseerd is op de konstrueerbaarheid der meetkundige objekten. Daarom is het noodzakelijk de periode van denkend doen voort te zetten en zoveel te laten konstrueren tot de signalen voor deze konstrueerbaarheid gevormd zijn; dan pas kan er een denken mogelijk worden die op aanschouwing berust.

Het tweede leerproces in de meetkunde begint weer met een receptieve instelling, waarbij het leren meer op het resultaat van de konstruktie, dan op de konstrueerbaarheid is gericht. Alleen door denkend doen ontstaan de signalen voor de konstrueerbaarheid, waarbij de houding als het ware omslaat in een aktief strukturerende. Evenwijdigheid (door middel van de figuren ladder en zaag), kongruentie van driehoeken, gelijkvormigheid van driehoeken krijgen kenmerkende eigenschappen. Men kan ze nu niet alleen tijdens het doen laten signaleren, maar ook tijdens het denken over het doen.

Hier komt een scheiding tussen vaardigheid en verdieping te voorschijn. Richt men zich op de vaardigheid, dan richt men zich verder op de struktuur van het handelen. Steeds ingewikkelder konstrukties worden mogelijk. Men kan dus op het eerste denkniveau nog wel een hoge graad van beheersing bereiken. Voor het bereiken van het tweede denkniveau is echter een gerichtheid op de explicitering van deze struktuur noodzakelijk. Een verdieping, een meer retrospektief denken wordt voor de vorming van de nieuwe signalen verlangd.

Hieruit volgt tevens, dat wanneer het er om gaat de leerlingen de mogelijkheid te bieden het derde denkniveau [1] te bereiken, de docent van hier af er terdege op dient te letten, dat hij niet vervalt in een *technisch georiënteerde didaktiek.* Het is die didaktiek, waarbij de leermeester *de signalen gaat plaatsen,* de oriënterende periode vervangt door een periode van voordoen, voordenken, vooranalyseren en toepassen. Zo kan de docent een hoge beheersingsgraad doen bereiken. Tot grote schade voor de persoonlijke vorming van het kind, want men bedenke wel, dat men zo ook het denken belet. Er is geen eenheid meer tussen het natuurlijke leren en het onderwijzen, althans wanneer men het exakt leren denken als onderwijsdoel stelt.

Het *buitengewoon* lager onderwijs volgt doelbewust deze didaktiek. Terecht probeert dáár de onderwijzer het kind bepaalde strukturen, die op een te hoog denkniveau liggen al *doende* te laten beheersen met het oog op diens direkt levensbelang in de maatschappij.

Maatschappij en universiteit verwachten van het V.H.M.O. dat, met het oog op de leidende posities die de leerlingen later zullen moeten innemen, deze op de school een zekere scholing in het denken doormaken. Een technisch georiënteerde didaktiek draagt niet bij tot de vorming van persoonlijkheden die leiding kunnen geven en op de universiteit niet tot de vorming van personen die na specialisatie ook nog tot integratie kunnen komen.

Wil men het kind op het tweede denkniveau laten komen ter wille van het ontstaan en de beheersing van de denkstrukturen, dus ter

wille van de vorming van de persoonlijkheid, dan moet het onderwijs zich richten naar het natuurlijk leerproces; de meest gunstige leersituaties zoeken, die de vorming van een signaal *van binnen uit* mogelijk maken.

Voordat tot ontwikkelen van de struktuur van de ordening kan worden overgegaan is het noodzakelijk het aantal meetkundige symbolen nog met een uit te breiden. Het „volgen uit" is in de meetkunde wezenlijk verschillend van het volgen uit in 't dagelijks leven of in andere leervakken, zodat de leerlingen hiervan eerst een juiste struktuur moeten krijgen.

Wanneer de leerlingen in het eerste leerjaar twee uren per week meetkunde-les krijgen, zijn in het algemeen aan het eind daarvan allen op het eerste denkniveau en beschikken over visuele meetkundige strukturen. De voorwaarde om tot het tweede denkniveau te kunnen komen, is vervuld. Er is natuurlijk wel verschil in mate van beheersing.

Ik zal nu overgaan tot de bespreking van het werkstuk, dat de kinderen in hun tweede leerjaar gedurende de maanden sept. okt. nov. '56—'57 gemaakt hebben.

Terwijl in het eerste leerproces sterk de aandacht op de delen van het geheel (de figuren) werd gevestigd — dus op differentiatie —, wordt nu de aandacht juist voor de opbouw der delen tot het geheel gevraagd: de ordening met behulp van het symbool „volgen uit". De meetkundige achtergrond is t.o.v. het eerste denkniveau gewijzigd. Van: „er is een samenhang" is zij veranderd in „hoe denken wij ons de samenhang". Ook dan vertoont zij struktuur, waarvoor de leerlingen zich signalen kunnen vormen. De bedoeling die ik met dit werkstuk heb is: leersituaties te scheppen, waardoor de leerlingen de meetkundige kontekst nu op hoger niveau gaan begrijpen. De kontekstbeleving doet nl. nieuwe signalen ontstaan, waarmee de leerling zich in het waarnemingsveld der symbolen gaat oriënteren en tot nieuwe symboolvorming komt. In de eerste leersituaties oriënteren de leerlingen zich gezamenlijk.

Het beste zou dan ook zijn een uitvoerig protokol van het geheel te maken, omdat dit een zuiverder weergave is van het aandeel van de docent en dat van de leerlingen. Daar dit echter teveel plaats vraagt, zal ik volstaan met op de belangrijke momenten van het leerproces stukjes protokol weer te geven.

In de eerste les na de grote vakantie, tekende telkens een ander kind een vierhoek op het bord als antwoord op mijn verzoek verschillende vierhoeken te tekenen. Zij tekenden uit de hand; noemden de naam en vertelden hoe de tekening bedoeld was. Daarna gaf ik

de opdracht op het eerste blanco blad in het schrift een ruit te tekenen, nu zo netjes mogelijk met de hulpmiddelen, die zij daarvoor ter beschikking hadden. De maten gaf ik niet op, omdat wij ons niet met een speciale ruit wensten bezig te houden, maar met het meetkundige begrip ruit. Deze opdracht bepaalt, welke eigenschappen door de konstruktie de ruit signaleren.Op blad 2 kwam een vlieger, blad 3 een rechthoek, 4 een vierkant, 5 een parallellogram, 6 een gelijkbenig trapezium, 7 een trapezium, 8 een rechthoekig trapezium, 9 een vierhoek.

Een der leerlingen tekende het parallellogram als volgt: eerst werden door opschuiven van de ene tekendriehoek langs de andere twee evenwijdige lijnen getrokken en daarna met de passer twee gelijke stukken er op afgezet. Het feit dat de leerlingen zonder nadere aanduiding deze figuren feilloos konstrueerden, ieder op zijn manier, toont dat zij zich in dit waarnemingsveld thuis voelden. Ieder beschikte over eigen signalen om de symbolen te herkennen. In de tweede les kregen de leerlingen opdracht op ieder rechterblad de meetkundige eigenschappen op te schrijven die zij kenden van de figuur op het bijbehorende linkerblad. (Dit is te beschouwen als een kontrole of symboolvorming heeft plaats gehad.)

Ook moesten zij vermelden, als zij de figuren zouden uitsnijden, op hoeveel manieren zij dan deze weer in het gat zouden kunnen passen. Hiermee wordt het voorstellingsvermogen gekontroleerd en heeft het kind een hulpmiddel, dat als signaal dienst kan doen om eigenschappen nog weer snel terug te doen vinden. Dat het parallellogram niet omgekeerd in het gat past en wel door draaiïng om het snijpunt der diagonalen kostte enkele leerlingen moeite.

De andere naam voor het vierkant werd teruggevonden, nadat ik uit de hand tekende: een gelijkzijdige driehoek, een vierkant, een regelmatige vijfhoek en een regelmatige zeshoek. Daarna werden in het schrift toegevoegd de regelmatige driehoek (fig. 10), de regelmatige vijfhoek (fig. 11), en de regelmatige zeshoek (fig. 12). Deze twee laatste figuren ontstonden door een cirkel met behulp van de gradenboog in vijf gelijke delen en met behulp van de passer in zes gelijke delen te verdelen. Ook van deze figuren werd nagegaan op hoeveel manieren zij weer in het gat zouden kunnen passen en werden meetkundige eigenschappen van de zijden, de hoeken en de diagonalen opgeschreven.

Om te kontroleren of de leerlingen deze symbolen konden gebruiken halveerden wij enige figuren op een bepaalde manier en vroeg ik van de zo ontstane figuur de meetkundige eigenschappen. Zo werd fig. 1 gehalveerd en ontstond de gelijkbenige driehoek (fig. 1b).

Fig. 2b ongelijkzijdige driehoek, 3b rechthoekige driehoek, 4b half vierkant (tekendriehoek of rechthoekige gelijkbenige driehoek), 9b halve gelijkzijdige driehoek (tekendriehoek).

De kenmerken van kongruente driehoeken legden wij opnieuw vast. Bij het overbrengen van een driehoek maakten wij gebruik van het ordenende principe „het past als twee zijden en de ingesloten hoek van de ene driehoek resp. gelijk zijn aan twee zijden en de ingesloten hoek van de tweede driehoek". Zo hadden wij reeds kennis gemaakt met drie middelen om kongruente driehoeken te herkennen: (Z.Z.Z.); (Z.H.Z.); (H.Z.H.). Wij konstateerden opnieuw dat (H.H.H.) geen kongruentie-geval is. Dit maakten de leerlingen elkaar als volgt duidelijk — de zijden behoeven niet gelijk te zijn — de driehoeken hebben alleen dezelfde vorm. De in het vorig jaar opgedane ervaring, dat (Z.Z.H.) niet altijd kongruente driehoeken oplevert, werd genoemd en ook dat (Z.Z.H.) wel bij rechthoekige driehoeken een kongruentie-geval is. Men was algemeen van oordeel dat twee driehoeken, die een zijde, een aanliggende en een overstaande hoek gelijk hebben, kongruent moeten zijn. Op mijn vraag: hoe weet je dan dat het passen zal?, kwamen twee verschillende antwoorden te voorschijn 1) als F niet op C komt zou je een ladder hebben en dat kan niet want dan komt E niet meer in B, 2) hoek E past op hoek B want die zijn ook gelijk omdat de drie hoeken van de driehoek samen 180° zijn.

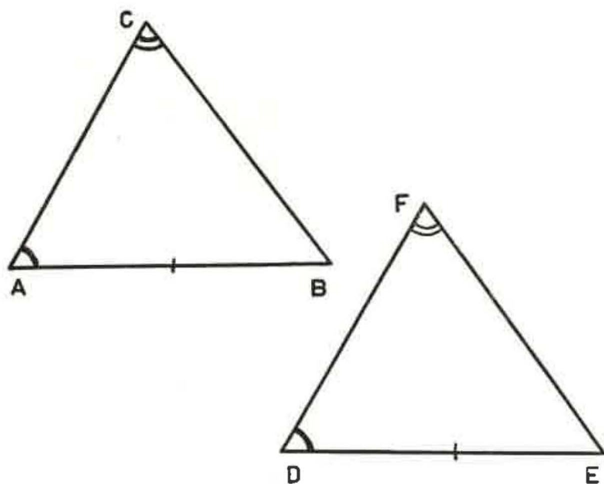


Fig. 1.

Erg ontvankelijk voor de eerste redenering waren de klasgenoten nog niet, allen vonden de reduktie van (Z.H.H.) tot (H.Z.H.) veel eenvoudiger.

De vijf manieren waarop kongruente driehoeken te herkennen zijn werden op het eerste blad van het schrift geschreven en toegevoegd werden de beide manieren waarop een zaag resp. een ladder herkend kunnen worden. Voor dit werk waren 6 lessen (3 weken) nodig, waarin voornamelijk individueel en in kleine groepjes gewerkt werd.

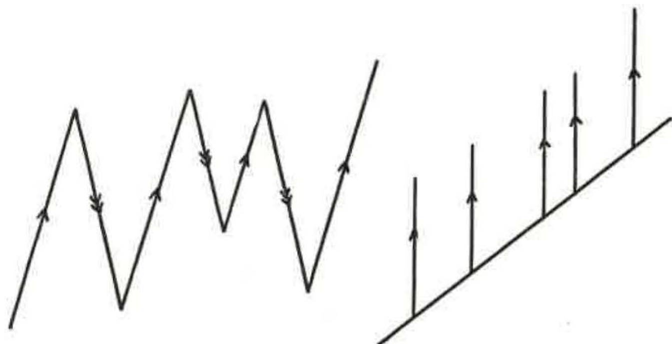


Fig. 2.

Protokol zevende les.

Pl. Nu gaan wij de eigenschappen van de ruit nakijken. Hoe hebben jullie de ruit gekonstrueerd?

Ppn. Met de passer de vier zijden gelijk gemaakt.

Pp.T Nee ik niet. Ik heb de diagonalen loodrecht op elkaar gezet en aan weerskanten gelijke stukken afgezet.

Pl. Goed. Om gemakkelijker over de eigenschappen te kunnen praten nemen wij allen dezelfde nummering. Als I nemen wij: De ruit heeft vier gelijke zijden. In een ruit zijn vier zijden gelijk, is ook goed. Later zullen wij ook eens beginnen op een andere manier b.v. zoals T. de ruit gekonstrueerd heeft. Wat hebben jullie voor eigenschappen van de hoeken van de ruit gevonden?

Ppn. De overstaande hoeken zijn gelijk.

Ppn. En de diagonalen delen de hoeken doormidden.

Pl. Deze noemen wij dan II resp. III.

Pp. Ik weet nog iets van de zijden.

Pl. Wat dan?

Pp. De overstaande zijden lopen evenwijdig.

Ppn. Ja, dat heb ik ook.

Pl. Goed zo, dat noemen wij dan IV.
(Een aantal leerlingen moeten deze eigenschap er bij schrijven en daarom vraag ik:)

Pl. Hoe wist je dat die lijnen evenwijdig zijn?

Ppn. Dat hebben we gehad bij de tegels.

(Op het bord wordt nu nog even de tegelvloer getekend en de evenwijdige lijnen aangewezen.)

Pl. Welke eigenschappen ken je van de diagonalen?

Ppn. De diagonalen delen elkaar doormidden. (V)

Ppn. Ze staan loodrecht op elkaar. (VI)

Ppn. De diagonalen zijn symmetrie-assen van de ruit.

Pl. Goed. De laatstgenoemde geven wij geen nummer. Dit is vroeger gebruikt om de eigenschappen te vinden. Nu gaan wij naar figuur 1b. Hoe hebben jullie de halve ruit gekonstrueerd?

Ppn. De benen met de passer gelijk gemaakt.

Pl. Hoe noemt men hem daarom wel?

Ppn. Gelijkbenige driehoek.

Pl. Dus eigenschap I hebben wij allemaal? Wat weet je nog meer?

Ppn. De basishoeken zijn gelijk. —(II)—

Ppn. Nog een. De symmetrie-as is zwaartelijn, hoogtelijn, en bissectrice. —(III)—

Daarna kwam de vlieger aan de beurt en werden ook zijn eigenschappen genummerd.

De driehoek bleek slechts één eigenschap te bezitten: de drie hoeken zijn samen 180°.

Protokol achtste les.

(Ik tekende een ruit op bord.)

Pl. Wij nemen allen weer de eerste figuur voor ons. Daar staat I: de vier zijden zijn gelijk, en II: de overstaande hoeken zijn gelijk. Zou II een gevolg zijn van I?

Ppn. Ja.

Pl. De bedoeling is dit nu niet meer aan te tonen met vouwen, maar op de manier van de voorvaders zoeken. Je mag alleen die voorvaders gebruiken, die wij op het eerste blad hebben geschreven en je moet nog vermelden ook hoe je die voorvader herkend hebt. Welke voorvaders staan daar genoemd?

Ppn. Zaag, ladder en kongruente driehoeken.

Pl. Op hoeveel manieren kunnen wij kongruente driehoeken herkennen?

Ppn. Op vijf.

Pl. En de zaag en de ladder?

Ppn. Elk twee.

Pl. Wij hebben dus keus uit 9 kenmerken. Laten we maar eens

proberen. Ik geef met een pijl aan dat II uit I volgt, aldus:

I
↓
II

Om in te zien dat het zo is, heb ik een voorvader nodig. Ziet iemand welke voorvader er nodig is?

Ppn. Kongruente driehoeken.

Pl. Maar ik zie geen driehoeken.

Ppn. Natuurlijk de diagonaal er bij trekken. (handbeweging horizontaal)

Pl. Welke van de vijf kenmerken is het?

Ppn. Drie gelijke zijden. (Z.Z.Z.)

Pp.P. Bij mij zijn de drie zijden niet gelijk. Bij hem (wijzend op zijn buurman) wèl. (Deze buurman heeft de zijde van de ruit gelijk aan de diagonaal genomen.)

Ppn. Dat doet er toch niet toe!

Pp.P. (een beetje kwaad) Nou dan is het bij mij niet drie gelijke zijden. (Nu gaan wij de kronkel begrijpen; van verschillende kanten komt de uitleg.)

Pp. zzz betekent niet dat de drie zijden van de driehoek gelijk zijn, maar dat de drie zijden van de ene driehoek gelijk zijn aan die van de andere driehoek. Ze hoeven ook niet eens gelijkbenig te zijn zoals hier. (Een van allen tekent nog even twee ongelijkzijdige kongruente driehoeken op het bord.) (Pp. P. vindt zichzelf vreselijk stom en uit dit krachtdadig.)

Pl. Wij zien dus wel dat het verwarring geeft dat B. precies de zijde van de ruit gelijk genomen heeft aan de diagonaal.

Ppn. Dat heb ik ook gedaan. Is het fout?

Pl. Wanneer er gevraagd wordt: teken een driehoek, dan tekenen wij juist niet een gelijkzijdige driehoek of een gelijkbenige driehoek. Wanneer er gevraagd wordt: teken een vierhoek, dan tekenen wij juist niet een vierkant. Doe je het wel dan geeft dit vaak aanleiding tot verwarring en foute konklusies, zoals wij al gemerkt hebben. Van welke lange zin is (Z.Z.Z.) nu precies de afkorting?

Pp. Twee driehoeken, die de drie zijden gelijk hebben, zijn kongruent.

Pl. Nu schrijven wij het resultaat op het blanco vel naast de ruit aldus op:

I
↓ (ZZZ)
II

Kan ik zo ook laten zien dat die andere twee overstaande hoeken gelijk zijn?

Ppn. Ja natuurlijk, dan trek je de andere diagonaal.

Pl. Zou ook III uit I volgen? De diagonalen delen de hoeken doormidden.

Ppn. Ja.

Pl. Vertel dan maar hoe.

Ppn. Weer (ZZZ).

Pp. Ik dacht (ZHZ).

Pl. Ja dat kan ook. Welke hoek?

Pp. Die hoeken die we net gehad hebben.

Pl. Dan heb jij dus ook II gebruikt. Zodat we mogen schrijven:

I   I en II
↓ (ZZZ)   ↓ (ZHZ)
III   III

ze zijn beide goed.

Pl. Nu IV. In een ruit lopen de overstaande zijden evenwijdig.

Ppn. Ik zie een zaag.

Pl. Hoe herken je nu dat het een zaag is?

Pp. Die hoek is gelijk aan die hoek. (Hij komt zaag en hoeken aanwijzen.)

Pl. Is IV een gevolg van I?

Pp. Nee van III, nee van II, van II en III.

Pl. Ja, we hebben ze beide nodig.

Wij schrijven daarom op: II + III zaag, herkend aan de
↓   gelijke hoeken.
IV

(Het gaat hier om het begrijpen dat beide eigenschappen nodig zijn. De preciese aanduiding kan achterwege blijven op dit ogenblik om het hoofdtema beter te doen uitkomen.)

Dan vinden wij gezamenlijk nog

I + II + III   en ook   I + II + III
↓   (HZH)   ↓   (HZH)
V   VI

Pl. Zo zien wij dat IV, V en VI niet voor II en III kunnen komen.

Pp. Ik mag wel eerst VI en dan V doen?

Pl. Ja. Wij zijn dus wel een beetje vrij in het kiezen van de volgorde. T. wou zelfs anders starten en dat kan ook nog, zoals wij later zullen onderzoeken.

Daarna analyseren de leerlingen de vlieger, de rechthoek, het vierkant enz. Iedere figuur brengt weer nieuwe ervaringen. Al gauw geef ik niet meer aan welke eigenschap no. II moet zijn. Bij de vlie-

ger blijkt duidelijk het nut van hoofdletters bij de hoekpunten. Je weet dan tenminste over welke diagonaal het gaat.

Van de twee eigenschappen van de rechthoek, die handelen over de zijden, moet eerst aangetoond worden „de overstaande zijden lopen evenwijdig". „De vier hoeken zijn recht" is tot I gekozen, omdat dit de naam rechtvaardigt. De kinderen proberen meestal eerst de gelijkheid van de overstaande zijden te vinden met behulp van kongruente driehoeken en dan blijken zij het kenmerk van deze voorvader niet te kunnen vinden.

Bij het vierkant ervaren de leerlingen, dat in no. I zowel moet worden opgenomen dat de zijden gelijk zijn als ook dat de hoeken recht zijn. Wij noemen ze resp. Ia en Ib. De eigenschap Ia hoort bij de ruit en geeft dus direkt al een aantal eigenschappen; zo ook Ib.

In het gelijkbenig trapezium moeten de leerlingen verdelingen aanbrengen, die niet zo direkt voor het grijpen liggen als bij de andere vierhoeken. Het geeft een besparing wanneer wij toelaten de uitkomsten van reeds afgehandelde figuren te gebruiken.

Het zou te ver voeren alle biezonderheden van het klassegesprek, hoe interessant ook, te vermelden. De oriëntatie geschiedt hoe langer hoe meer individueel. Dit blijkt daaruit dat de leerlingen er langzamerhand de voorkeur aan geven in kleine groepjes te werken.

Zodra naar mijn mening de kontekst, dus de wijze van analyseren voor vrijwel alle leerlingen duidelijk is geworden, begin ik nogmaals bij de ruit. Daar ik voldoende individueel kontakt had met de leerlingen, was geen schriftelijk werk van de hele klas nodig.

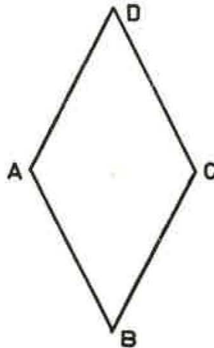


Fig. 3.

Protokol vijftiende les.

(Ik teken weer een ruit en zet hoofdletters bij de hoekpunten.)

Pl. Wie kan mij nu nog eens precies vertellen hoe eigenschap II uit no. I volgt?

Pp. In de figuur zie je twee driehoeken en dan zoek je het ken-

merk op, dat is zzz.

Pl. Noem de driehoeken eens precies op en ook de zijden die zij gelijk hebben.

Pp. ABC en ADC; $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{DC} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{AC}$.

Pl. Je bent dus begonnen met de mededeling dat je iets ziet. Daarom schrijf ik op:
Ik zie twee kongruente driehoeken ABC en ADC.
Daarna ben je nagegaan aan welk kenmerk je deze kongruentie kon herkennen. Daarom schrijf ik verder op:
Ik herken dit aan het kongruentiekenmerk (Z.Z.Z.) Wij vermelden erbij welke zijden wij bedoelen en waardoor wij dit weten.
$\overline{AB} = \overline{AD}$ (I)
$\overline{BC} = \overline{DC}$ (I)
$\overline{AC} = \overline{AC}$ hoeft geen betoog.
Ben ik er nu?

Ppn. Ja, want dan zijn de hoeken gelijk.

Pl. Dan schrijven wij dat op:
Ik weet nu dat $\angle B = \angle D$.
Wat nu op het bord staat noemen wij een bewijs.
Wanneer ik de volgende keer wens dat een van jullie dit bewijs opschrijft, dan stel ik eerst een vraag. Ik kleed die vraag dan als volgt in: Bewijs dat in een ruit de overstaande hoeken gelijk zijn.
Horen jullie in deze zin waarover het gaat, waar je mee begint, en wat je moet bewijzen?
(Ik schrijf nu boven het bewijs)
Te bewijzen: $\angle B = \angle D$ en $\angle A = \angle C$.
Je begint met een ruit te tekenen, dit betekent: je maakt de vier zijden gelijk en dat noemen wij het gegeven.
(Ik schrijf weer hoger op het bord)
Gegeven: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
(Daarboven schrijf ik nog de opgaaf)
Heb ik eigenlijk al bewezen dat $\angle A = \angle C$?

Ppn. Dat gaat net zo. Dan trek je de andere diagonaal.

Pl. Dan schrijf ik er nog onder:
Neem ik de twee driehoeken ADC en CDB, dan krijg ik dat $\angle A = \angle C$.

Er volgt een gesprekje over de volgorde der letters en dat wij i.p.v. (I) achter $\overline{AB} = \overline{AD}$ liever schrijven (geg.).

Daarna wordt opgave 1 met de uitwerking door de leerlingen in het schrift overgenomen.

Pl. Nu eigenschap III: de diagonalen delen de hoeken doormidden. Wie vertelt hoe opgave 2 zal moeten luiden?

Pp. Bewijs dat in een ruit de diagonalen de hoeken doormidden delen.

Pl. Schrijf dit nu eens zelf helemaal op zoals wij dat net geleerd hebben: eerst gegeven dan te bewijzen en dan het bewijs. Het grondpatroon voor het bewijs is: Ik zie... Ik herken... Ik weet nu...

Er volgde al gauw een diskussie, of in het gegeven ook moet staan $\angle B = \angle D$, want dat heb je in het bewijs nodig.

Pl. Wij zouden in het gegeven kunnen opnemen al datgene wat eens bewezen is. Dan echter wordt het gegeven bij opgave 20 wel erg groot. Dat doen wij daarom niet, ofschoon wij het reeds bewezene wel tot het gegeven mogen rekenen. Ook zouden wij in het gegeven kunnen opnemen alleen datgene wat wij in het bewijs nodig hebben, maar meestal weten wij van te voren niet, wat wij nodig zullen hebben. Wij spreken daarom af, dat wij deze gegevens niet vermelden in het gegeven, maar daar waar wij er in het bewijs gebruik van maken.

Dus achter $\angle B = \angle D$ schrijven wij: (bewezen in opgave 1) of: (eig. II van de ruit).

In opgave 3: Bewijs dat in een ruit de overstaande zijden evenwijdig lopen, kwam eerst de moeilijkheid van het aanduiden van de zaag. Dit kan geschieden met letters en met kleurpotlood in de figuur.

Ik zie een zaag D-A-C-B. Ik herken hem aan de gelijke hoeken DAC en BCA. Hier kwam weer een moeilijkheid: hoe moeten wij nu precies vertellen dat wij eig. II en III gebruiken?

Pp. Eerst de hele hoeken dus eerst II en dan de helften nemen.

Pl. Wij schrijven dit op:

$\angle A = \angle C$ (opg. 1, eig. II)

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C \\ \text{Dat is } \angle DAC \text{ en } \angle BCA.\end{array}\right\}$ (opg. 2, eig. III)

Ppn. Ik weet nu ook dat AD // BC.

Evenzo met de zaag B-A-C-D. AB // CD.

Hiermee heb ik naar ik hoop de gang van zaken voldoende toegelicht. Daarna volgden nog twee opgaven van de ruit. Vervolgens werden de vlieger, de rechthoek, het vierkant enz. afgehandeld. De leerlingen vinden het oefenen prettig, tellen vooruit hoeveel opgaven de volgende figuur moet hebben, formuleren zelf deze opgaven en kunnen het vrijwel zonder huiswerk af. Voor bijna alle kinderen

komt aan het licht dat zij georiënteerd raken in de situatie, nieuwe symbolen worden gevormd: een figuur wordt een *geordende* verzameling van meetkundige eigenschappen. Kongruente driehoeken, ladders en zagen werken als signalen. Door de veelheid van oefenmateriaal vormen de kinderen zich als het ware valenties voor de handelingsstruktuur, die de denkstruktuur tenslotte vergezelt. Zij gaan het geheel beheersen en krijgen zodoende een veld van nieuwe symbolen. Wel moeten de ordenende principes nog uitgebreid worden o.a. met gelijkvormigheid van driehoeken, verzamelingen van punten en lijnen.

Het tweede leerproces is duidelijk in drie periodes in te delen: 1e periode (ongeveer drie weken) waarin nagegaan wordt a) in hoeverre er valenties gevormd zijn voor de rechtstreekse binding van meetkundige eigenschappen aan reeds meetkundig geanalyseerde figuren. b) of er sprake is van een gericht handelen, waardoor nieuwe figuren op dezelfde wijze gestruktureerd kunnen worden, vergezeld van een denken over het resultaat van het handelen, waardoor meetkundige eigenschappen van die figuren geëxpliciteerd kunnen worden. c) in hoeverre het denken reeds vrij is van dat handelen, d.w.z. of er met de symbolen geopereerd kan worden, of deze te anticiperen zijn. 2e periode (ongeveer twee weken) gekenmerkt door analyses van de leerlingen gezamenlijk om zich te oriënteren in het veld van de symolen. Dit leidt tot signaalvorming voor kongruente driehoeken, zagen en ladders d.w.z. tot de juiste vulling van het begrip „bewijzen" in de meetkunde. 3e periode (ongeveer zes weken) na een georiënteerd raken in de situatie komt de beheersing van de denkstruktuur en daarna de vorming van valenties voor de bijbehorende wijze van explicitering (de taalstruktuur).

Het schema: Ik zie . . ., Ik herken dit aan . . ., Ik weet nu dat . . . is geen schema, dat beoogt een wiskundige gedachtengang beknopt weer te geven, maar een schema dat zich aansluit bij het verloop van het denkproces. In de aanvang is een receptieve instelling van de persoon gewenst, de valentiewerking die van het materiaal uitgaat (door kenordeningen) komt dan het best tot zijn recht. Deze is nodig om te komen tot aktualisering van het denken. Vandaar het eerst: Ik zie . . . Zodra dit echter neergeschreven is, is de houding reeds omgeslagen in een aktieve denkhouding. Er heeft een schematische anticipatie plaats gehad, mogelijk geworden doordat de leerling in het veld van de symbolen georiënteerd is. Dit wordt uitgedrukt door de woorden: Ik herken dit aan . . . De anticipatie heeft tot het doel geleid: Ik weet nu dat . . .

Dit werkstuk is duidelijk voor de leerlingen doelgericht geweest.

Zij hebben leren *bewijzen* in de meetkunde.

Het tweede leerproces mag als geëindigd beschouwd worden voor die leerlingen: a) die een figuur in de meetkunde opvatten als een totaliteit van geordende eigenschappen, b) die de ordenende principes kongruentie en evenwijdigheid hebben geëxpliciteerd, c) die zelf een ordening kunnen aanbrengen. Er moet een schematische anticipatie mogelijk zijn. Zij beschikken dan over de denkstruktuur, die nodig is voor het denken op het tweede niveau.

Op het tweede denkniveau is men, wanneer voldoende symbolen doorgestruktureerd zijn (o.a. doordat de ordenende principes uitgebreid zijn) én wanneer de mogelijkheid bestaat met de nieuwe symbolen te opereren, want dan pas beschikt men over voldoend voorstellingsvermogen. Het kenvermogen is dan tot ontwikkeling gebracht.

Drie van de twintig leerlingen bleken de denkstruktuur niet machtig te zijn. Het zijn: een jong meisje dat 20 dec. dertien jaar is geworden; voorts een meisje dat veel absent was en ook het jaar daarvoor veel ziek was geweest en tenslotte een jongen, die altijd eerst andere verbindingen legt.

Terugblik. Wanneer het in de didaktiek gaat om het aspekt „hoe leren kinderen" dan komt dit neer op het interpreteren van zekere van hun gedragingen tijdens het onderwijsproces.

Nu is dit interpreteren alleen maar mogelijk door introspektie. Zo kan ook de psychologie der dieren slechts door interpretatie van hun gedrag benaderd worden. Wij beschikken immers alleen over een zeker inzicht in de samenhang van menselijke gedragingen en dit stelt ons in staat overeenkomstige en afwijkende strukturen te herkennen in de gedragingen van dieren en planten.

Wensen wij de gedragingen van het lerende kind te bestuderen, dan kunnen wij twee kanten uit.

1) Introspektie naar een ver verleden, toen wijzelf lerend kind waren.

2) Introspektie tijdens een leerproces, dat men zelf op het ogenblik meemaakt of net heeft meegemaakt — niet een leerproces in het gestudeerde vak om de vakkennis te vergroten, maar een leerproces op een geheel nieuw gebied b.v. het leren van een nieuwe taal, het leren van de didaktiek van het vak.

Het nadeel van eerstgenoemde introspektie is, dat het leren van toen niet goed meer te beleven is — er kan op deze introspektie geen signaal gevormd worden. Als nadeel van de andere metode zou men kunnen noemen, dat het leren van volwassenen anders is dan het

leren van het kind. Wij moeten echter bedenken, dat wij het leren van het kind alleen kunnen benaderen als wij over een of ander signaal beschikken. Na de introspektie, gepaard gaande met een aktieve instelling van de persoon om tot ontplooiïng van het signaal te komen, volgt een fenomenale analyse, waarin gedragingen tijdens en na het leerproces van volwassenen en kinderen vergeleken kunnen worden.

Een fenomenale analyse houdt een element van willekeur in. Levert deze analyse nieuwe signalen op, dan treedt een aktieve instelling in. Door veralgemening komt men tot de vulling van zijn didaktische begrippen. Deze kunnen toch immers nooit axiomatisch vooropgesteld worden, omdat wij met de bestudering van een verschijnsel te doen hebben.

Wanneer verscheidene personen op deze wijze tot dezelfde vulling van de didaktische begrippen komen, kunnen wij proberen een algemene didaktiek te grondvesten met als belangrijkst symbool: „het leren".

Nadat ik in het begin van dit artikel steeds het aksent heb laten vallen op het leren, wil ik nu aanvullend nog de handelwijze van de docent typeren die bij dit leren aansluit: *het onderwijzen*.

In het eerste onderwijs-leerproces zijn de leerlingen bezig met konkreet materiaal. De docent heeft een aktieve instelling in het begin, om de leerlingen te animeren opdrachten met het konkrete materiaal te volbrengen. Hij weet, dat de funktie van het konkrete materiaal niet de verduidelijking is van het abstrakte denken, maar veeleer het op gang brengen ervan. Daarna volgt er in diskussies een fenomenale analyse, waarin de kinderen ervaren om welke samenhangende feiten het gaat. De leerlingen hebben dan een aktieve instelling — de leraar een receptieve; hij blijft op de achtergrond; leidt de diskussies totdat het juiste signaal voor het aspekt van de meetkunde verworven is. De vaktaal leren zij van hem — de eigenschappen van de figuren echter worden door henzelf onder woorden gebracht.

In het tweede leerproces heeft de docent aanvankelijk een aktieve instelling. Hij bedenkt veel opdrachten om de leerlingen tot exploratie te doen komen. De nieuwe kontekst „het volgen uit" moet ervaren worden door veel te laten konstrueren. De kinderen hebben een aktieve instelling om te handelen — zijn echter receptief ingesteld t.o.v. het denken tijdens hun meer individuele onderzoekingen. Wanneer het nieuwe signaal zich begint te vormen, analyseren de leerlingen gemeenschappelijk in klassegesprekken. De

leraar treedt weer terug om de leerlingen de denkstruktuur te laten expliciteren. Tenslotte verminderen de klassediskussies en komt een periode van oefenen, die weer meer individueel verloopt. Het gaat nu om de technische beheersing van de denkstrukturen. Hierin treden dan verschillen op in beheersingsgraad.

Doel van dit artikel is, duidelijk te maken, dat het er heel veel toe doet wat de leerlingen in de intuïtieve kursus leren. Men heeft niet te doen met een waarheid achter de dingen, die de kinderen pas kunnen gaan zien als zij biologisch rijp geworden zijn voor logische denkstrukturen.

Integendeel er ligt in de dingen wat de mensheid er in heeft willen zien en wat er verder nog in onderscheiden zal worden.

Zo zal de didaktiek pas goed ontwikkeld kunnen worden als men zal hebben ingezien, dat, de leerstof gezien door de docent een *geheel andere struktuur* heeft dan de leerstof gezien door de leerling. Wij behoeven daarbij slechts te denken aan symbolen zoals „volgen uit" en „definitie". Allerlei begrippen moeten eerst inhoud, een *vulling* voor de leerlingen krijgen, voor zij er mee kunnen opereren. De benadering dient te geschieden vanuit het „nulde" niveau — de globale strukturen, de images.

Door het analyserende denken worden er onaanschouwelijke gehelen toegevoegd aan de aanschouwelijke totalen, waar wij van uit gegaan zijn. Gedurende het eerste leerproces worden door de fenomenale analyse de aanschouwelijke gehelen opgenomen in visuele meetkundige strukturen. Het koncept van een geometrische figuur is van image overgegaan in meetkundig symbool en door de fenomenale analyse in het tweede leerproces in een nieuw meetkundig symbool: Figuren zijn dan totalen van geordende meetkundige eigenschappen geworden. Op déze koncepten berust, psychologisch, de teorie der meetkunde en onze leerlingen moeten zich eerst van binnen uit een signaal voor de struktuur van het veld van deze symbolen vormen. Dit veld is een denkveld, dat voortgekomen is uit het waarnemingsveld der images ten gevolge van een analyse in een bepaalde zin. Dit denkveld ontstaat niet automatisch, maar wordt door een *leerproces* verworven. De mens moet een leerproces doormaken voordat hij op matematisch niveau kan denken.

De analyse van de geschiedenis der wiskunde geeft ons niet voldoende gegevens voor het probleem hoe men de signalen helpt ontwikkelen. Er zijn weinig bronnenpublikaties en het is een wetenschappelijke traditie, vooral in de wiskunde, de sporen van de induktieve metode uit te wissen.

LITERATUUR.

1) Een eerste vulling van het begrip denkniveau kan men vinden in Paed. Stud. XXXII, 10: De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O. door P. M. van Hiele. De duiding van de niveaus is vastgelegd in: De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof door P. M. van Hiele en in: De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. door schrijfster dezes. Wij spreken van het „nulde" denkniveau, wanneer de leerling nog niet in meetkundige zin geanalyseerd heeft. Van eerste denkniveau, wanneer de leerling waarnemingsstrukturen meetkundig gestruktureerd heeft; een figuur voor hem een verzameling van meetkundige eigenschappen is en hij met deze meetkundige strukturen kan opereren. Van tweede denkniveau wordt gesproken wanneer de leerling met meetkundige relaties kan opereren; dan is een figuur een geordende verzameling van meetkundige eigenschappen geworden.

Op het derde denkniveau (het matematisch denkniveau) wordt de aard der relaties bestudeerd. B.v. het nodig en voldoende zijn van voorwaarden, het symmetrisch zijn van relaties. De intrinsieke ordening van „het volgen uit" is dan studieobjekt.

2) Woorden, zoals kontekst, symbolen, signalen, denkniveau vindt men toegelicht in Paed. Stud. XXXIV, 5 door P. M. van Hiele: Een denkpsychologische benadering van het begrip denkniveau.

3) Een uiteenzetting van mijn didaktische principes is vastgelegd in Paed. Stud. XXXIV, 6. Teoretische Didaktiek.

4) Voor de betekenis van woorden als: valentie, receptieve instelling, wil ik volstaan met verwijzing naar Van Parreren: Intentie en autonomie in het leerproces. Amsterdam 1951.

KALENDER

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

Op zaterdag 17 mei 1958 zal de werkgroep het programma bespreken van het onderdeel didaktiek voor de akte wiskunde l.o. Toelichtingen zullen worden gegeven door Dr. L. van Gelder (Badhoevedorp) en Chr. Boermeester (Den Haag). De toelichting van de examencommissie voor de akte wiskunde l.o. is gepubliceerd in het aprilnummer van het mededelingenblad van de werkgroep en wordt op verzoek gaarne aan belangstellenden toegezonden. In verband met de verhindering van de voorzitter van de werkgroep, Prof. Dr. H. Freudenthal, heeft de heer A. J. S. van Dam, inspekteur van het v.h.m.o. en voorzitter van bovengenoemde examencommissie zich bereid verklaard deze samenkomst voor te zitten.

De samenkomst vindt plaats om 15 uur in het Mathematisch Instituut, Boothstraat 17, Utrecht. Ook belangstellende niet-leden zijn welkom.

COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Président: G. CHOQUET, Vice-Président: J. PIAGET
Secrétaire: C. GATTEGNO, Secrétaire européen: W. SERVAIS

XIIème Rencontre internationale de Professeurs de mathématiques

du 5 au 12 août 1958

à Saint Regulus Hall The University Saint Andrews (Ecosse)

Thème: „La question des problèmes dans l'enseignement des mathématiques"

PROGRAMME

5 août, mardi:	Matin: Arrivée des participants et installation Après-Midi: conférence d'ouverture et discussion Soirée: Réunion
6 août:	Matinée libre Après-midi: Les composantes du problème. Etude psychologique Soirée: Réunion
7 août:	Matin: Les composantes du problème. Etude morphologique Après-midi: Discussion Soirée: Réunion
8 août:	Excursion en car, visite des lochs dans les Highlands Soirée: Continuation de la discussion de la veille
9 août:	Matin: Y a-t-il une pédagogie du problème Après-midi: Discussion des réponses aux divers niveaux scolaires Soirée: réunion
10 août:	Matinée et après-midi: Travail par groupes. Esquisses de vrais problèmes Soirée: réunion
11 août:	Matinée et après-midi: Discussion des rapports et Exemples Soirée: Conclusions
12 août:	Départ
Coût:	£ 10 (dix) pour la semaine tout compris. Chambres individuelles ou pour couples.
Inscriptions:	auprès de M. W. SERVAIS, 60, rue des Déportés, Morlanwelz (Belgique) £ 3 à verser en dépôt à l'inscription (non remboursable). Le nombre des places est limité à 50 [1])
Repas:	Petit déjeuner: 8 h 30 Déjeûner: 13 h Thé: 16 h 30 Dîner: 19 h 30
Trains:	d'Edimbourg presque toutes les 1/2 heures (pas de trains le dimanche, le voyage dure de 2 à 2 h 1/2; Premier 7 h 30 - Dernier 20 h 34
Avions:	d'Edimbourg pour Londres à 7 h 15, 9 h 50, 14 h 30, 19 h 15 (3 heures de vol). Le train de 11 h 45 à Saint Andrews convient pour le vol de 14 h 30
Autobus:	nombreux, voyages plus longs.

[1]) Men kan zich voor deze conferentie opgeven door een bedrag van ƒ 32.— te storten op girorekening 952125 van dr. Joh. H. Wansink, Arnhem, met vermelding „wiskunde-conferentie Schotland". Het restant moet betaald worden bij aankomst.